

Ανάλυση Οικονομικών Υποδειγμάτων σε Υπολογιστικό Περιβάλλον με Κώδικα

Κουμαντάνου Δήμητρα, Συρή Βικτώρια, Ταταρίκου Ηλιάνα-Βασιλική και
Τσιλίκα Κυριακή*

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Email: {dkoumantanou, vsyri, itatarikou, [ksilika](mailto:ksilika@uth.gr)}@uth.gr

* αλληλογραφών συγγραφέας

Περίληψη

Η παρούσα εργασία προτείνει μια χρήση του συστήματος υπολογιστικής άλγεβρας Wolfram Mathematica με δυνατότητες διδακτικής και ερευνητικής αξιοποίησης στην οικονομική επιστήμη. Η υπολογιστική προσέγγιση που προτείνουμε προβλέπει τη συγγραφή πρωτότυπου κώδικα καταρχήν για την κωδικοποίηση ενός οικονομικού υποδείγματος και έπειτα για τη διαδραστική διερεύνησή του με αναλυτικά και γραφικά αποτελέσματα επίλυσης. Κάθε μελέτη περίπτωσης που παρουσιάζεται αποτελεί ένα προϊόν ανοιχτής πηγής (open source resource) καθώς ο κώδικας μπορεί να τροποποιηθεί από γνώστες της Wolfram Language. Η εργασία απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκουν οικονομικά υποδείγματα αλλά και σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές οικονομικής κατεύθυνσης. Τα αρχεία με τις μελέτες περίπτωσης της εργασίας είναι στη διάθεση κάθε ενδιαφερόμενου για χρήση σύμφωνα με την άδεια CC BY-NC-SA (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.el>), μετά από αίτημα στον υπεύθυνο για την αλληλογραφία συγγραφέα.

Λέξεις κλειδιά: Διαδραστική οπτικοποίηση; παραμετρική ανάλυση; συγκριτική στατική ανάλυση.

1. Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αφορά ένα ερευνητικό σχέδιο που χρησιμοποιεί το σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας Wolfram Mathematica (v. 11.3) και έχει θέμα κλασικά υποδείγματα της μικροοικονομικής και μακροοικονομικής θεωρίας. Δημιουργούνται διαδραστικά υπολογιστικά έγγραφα (interactive computable documents) με δημιουργία πρωτότυπου κώδικα, με σκοπό την εμπειρική ανάλυση και τη διαδραστική διαγραμματική απεικόνιση τριών διαδομένων οικονομικών υποδειγμάτων. Οι εφαρμογές αυτές τρέχουν σε οποιοδήποτε υπολογιστή με τη βοήθεια του δωρεάν CDF plugin της Wolfram, “Wolfram Player” (διαθέσιμο από <http://www.wolfram.com/cdf-player/>) και απευθύνονται σε ένα ευρύτερο κοινό που δεν είναι χρήστες της Mathematica.

Οι εφαρμογές επίλυσης οικονομικών υποδειγμάτων που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία δύναται να αξιοποιηθούν ερευνητικά και κυρίως διδακτικά, από εκπαιδευτικούς, φοιτητές και ερευνητές οικονομικών επιστημών, αφού η εφαρμογή πολλών τεχνικών ανάλυσης χειρονακτικά είναι χρονοβόρα και απαιτεί αναλυτικές μαθηματικές μεθόδους που συχνά δεν είναι προσιτές στο ακροατήριο όπου απευθύνεται. Για εποπτικές απεικονίσεις, η δημιουργία δισδιάστατων ή τρισδιάστατων γραφικών παραστάσεων απαιτεί εξειδικευμένο λογισμικό και αντίστοιχες τεχνικές δεξιότητες από τον εκπαιδευτικό (Huang & Crooke, 1997). Στο περιβάλλον του προτεινόμενου διαδραστικού υπολογιστικού εγγράφου αντίθετα, επιτυγχάνεται αυτόματη δημιουργία μεγάλου αριθμού αριθμητικών παραδειγμάτων με αριθμητικά και γραφικά αποτελέσματα επίλυσης και χρήση κινούμενων γραφικών.

Όσον αφορά την ερευνητική χρήση, δημιουργώντας με τις ίδιες εντολές ένα Wolfram Demonstrations Project (2019), έχουμε μια ανοικτού κώδικα μικροεφαρμογή της Mathematica. Το Wolfram Demonstrations Project φιλοξενείται διαδικτυακά από τη Wolfram Research (<https://demonstrations.wolfram.com/>). Εδώ ο κώδικας είναι στη διάθεση του κάθε ενδιαφερόμενου με το πάτημα του πλήκτρου “Download Source Code” που υπάρχει στο αρχείο. Έτσι, η εφαρμογή μπορεί να βελτιωθεί ή να διαφοροποιηθεί από γνώστες της Wolfram Language υπηρετώντας συναφή ή πιο εξειδικευμένα υποδείγματα.

Οι τεχνικές μαθηματικής οικονομικής ανάλυσης που εξυπηρετεί η υπολογιστική προσέγγιση που προτείνεται είναι η παραμετρική ανάλυση, η συγκριτική στατική ανάλυση και η συγκριτική απεικόνιση οικονομικών καμπύλων επιχειρήσεων σε διαφορετικές αγορές (τέλειος ανταγωνισμός και μονοπώλιο). Η παραμετρική ανάλυση αποσκοπεί στον προσδιορισμό των προσήμων των παραμέτρων, τις τιμές που μπορούν να λάβουν καθώς και τις ενδεχόμενες σχέσεις μεταξύ τους. Η παραμετρική ανάλυση βασίζεται στην οικονομική θεωρία σε συνδυασμό με το μαθηματικό λογισμό (Τσουλφίδης, 2005 σελ. 258). Η μέθοδος που ακολουθείται για να δείξουμε πως μεταβάλλεται η ισορροπία εάν υπάρξει κάποια μεταβολή σε κάποιον προσδιοριστικό της παράγοντα λέγεται συγκριτική στατική ανάλυση.

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής. Στην ενότητα 2 γίνεται αναφορά στην εντολή Manipulate που επιτρέπει τη διαδραστική χρήση ενός θέματος. Στην ενότητα 3 δίνονται τρεις μελέτες περίπτωσης από την Οικονομική Επιστήμη, όπου με χρήση πρωτότυπου κώδικα αναλύονται ισάριθμα οικονομικά υποδείγματα. Ειδικότερα, στην ενότητα 3.1 παρουσιάζεται ένα υπόδειγμα ελαχιστοποίησης κόστους επιχείρησης υπό περιορισμό παραγωγής, στην ενότητα 3.2 αποδίδεται διαδραστικά η διαγραμματική ανάλυση οικονομικών συναρτήσεων σε μονοπώλιο και τέλειο ανταγωνισμό και στην ενότητα 3.3 αναλύεται το υπόδειγμα IS-LM ως εργαλείο για άσκηση νομισματικής και δημοσιονομικής πολιτικής. Στο παράρτημα της εργασίας παρατίθεται ενδεικτικά ο κώδικας στη Wolfram language για ορισμένα από τα αποτελέσματα.

2. Η εντολή *Manipulate*

Η βασική εντολή της προγραμματιστικής προσέγγισης που προτείνεται είναι η εντολή *Manipulate*. Η εντολή αυτή δημιουργεί ένα διαδραστικό αντικείμενο που ελέγχεται από ένα σύστημα χειρισμού των παραμέτρων που ο χρήστης θέλει να μεταβάλλει. Η έξοδος αποτελεσμάτων της *Manipulate* είναι ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα όπου ο χρήστης ορίζει επί τόπου τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος που θέτει ο κώδικας.

Το διαδραστικό μέρος της εντολής *Manipulate* είναι ένα σύνολο στοιχείων ελέγχου (σύρτες, πλήκτρα, αναπτυσσόμενες λίστες, κ.λ.π.) και στις εφαρμογές που παρουσιάζονται ρυθμίζουν τις παραμέτρους των οικονομικών υποδειγμάτων (εικόνα 1). Με τον διαδραστικό χειρισμό στοιχείων που παρέχει η εντολή *Manipulate* έχουμε ένα εργαλείο για παραμετρική ανάλυση και συγκριτική στατική ανάλυση υποδειγμάτων από την οικονομική επιστήμη.

3. Μελέτες περίπτωσης

3.1 Ελαχιστοποίηση κόστους επιχείρησης υπό περιορισμό παραγωγής

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ένα πρόβλημα μικροοικονομικής θεωρίας και πιο συγκεκριμένα αφορά τη Θεωρία Παραγωγής, η οποία είναι προαπαιτούμενο για την ανάλυση της συμπεριφοράς της επιχείρησης. Επίσης, πάνω σ' αυτή στηρίζεται η θεωρία του κόστους παραγωγής, που ερμηνεύει με τη σειρά της την πλευρά της προσφοράς των προϊόντων, η οποία μαζί με τη ζήτηση καθορίζουν τις τιμές των αγαθών. Μάλιστα, η θεωρία αυτή αποτελεί βάση για την ανάλυση της ζήτησης εκ μέρους της επιχείρησης των συντελεστών παραγωγής, οι οποίοι παίζουν κομβικό ρόλο στην παραγωγή του προϊόντος.

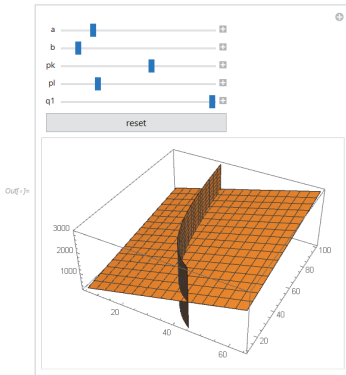
Το πρόβλημα που αναλύεται υπολογιστικά είναι η ελαχιστοποίηση της γραμμικής συνάρτησης κόστους παραγωγής της επιχείρησης (Τσουλιφίδης, 2005 σελ. 587-588).

$$C(K,L)=p_K \cdot K + p_L \cdot L \text{ υπό τον περιορισμό παραγωγής } q_1=15 \cdot K^a \cdot L^b, \quad (1)$$

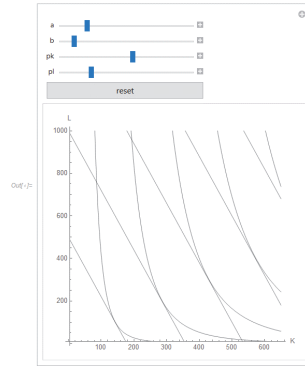
όπου K κεφάλαιο, L εργασία, a ελαστικότητα παραγωγής σε σχέση με το κεφάλαιο, b ελαστικότητα παραγωγής σε σχέση με την εργασία, A εξωγενής παράμετρος (π.χ. τεχνολογία), p_K τιμή κεφαλαίου, p_L τιμή εργασίας, q_1 η παραγωγή ενός συγκεκριμένου αγαθού της επιχείρησης για μια χρονική περίοδο. Μαθηματικά το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο Lagrange, προκειμένου να εντοπισθεί ο άριστος συνδυασμός εισροών (οι τιμές της εργασίας και του κεφαλαίου) που ελαχιστοποιούν το κόστος παραγωγής.

Αν $a + b > 1$, η συνάρτηση παρουσιάζει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας, ενώ όταν $a + b < 1$ παρουσιάζει φθίνουσες. Αν $a + b = 1$ η συνάρτηση Cobb – Douglas εμφανίζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Μέσω της εντολής *Manipulate* και κατάλληλου

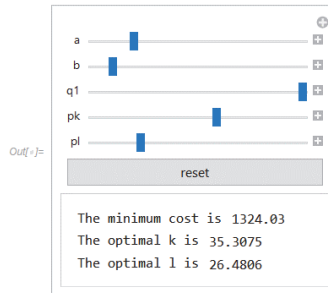
κώδικα που προγραμματίζει τη μαθηματική διαδικασία, υπολογίζεται διαδραστικά η τιμή ελάχιστου κόστους και ο άριστος συνδυασμός εισροών για διάφορες τιμές των παραμέτρων a , b , p_k , p_l , q_l (εικόνα 2).



Εικόνα 1α. Εποπτική απεικόνιση προβλήματος δεσμευμένης βελτιστοποίησης σε 3 διαστάσεις



Εικόνα 1β. Εποπτική απεικόνιση προβλήματος δεσμευμένης βελτιστοποίησης σε 2 διαστάσεις



Εικόνα 2. Αριθμητική επίλυση προβλήματος δεσμευμένης βελτιστοποίησης

3.2 Ισορροπία στον τέλει ανταγωνισμό και στο μονοπώλιο

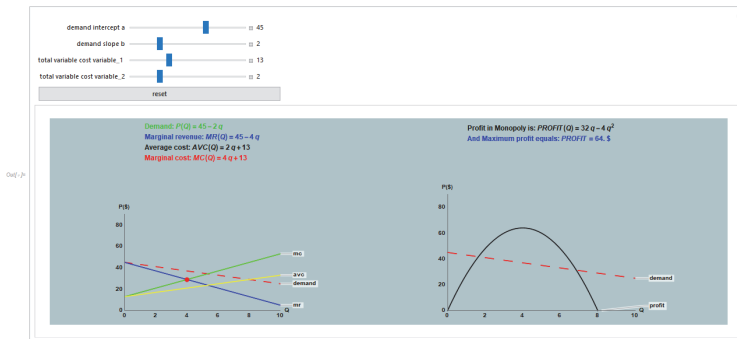
Στον κόσμο της οικονομίας, κυριαρχούν διάφορες μορφές αγοράς και οικονομικής δραστηριότητας, όπως το μονοπώλιο και ο τέλει ανταγωνισμός. Και στις δυο μορφές, βασική επιδίωξη είναι η μεγιστοποίηση των κερδών. Σύμφωνα με την Μικροοικονομική θεωρία, το μονοπώλιο αποτελεί την μορφή της αγοράς στην οποία υπάρχει μόνο ένας πωλητής, δεν υπάρχουν στενά υποκατάστατα του προϊόντος που παράγει και υπάρχουν περιορισμοί για την είσοδο άλλων πωλητών στον κλάδο (Δρανδάκης κ.α., 2003). Ως τέλει ανταγωνισμός ορίζεται η μορφή της αγοράς στην οποία υπάρχουν πολλοί αγοραστές και πωλητές που δρουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και δεν έχουν δύναμη σε ατομικό επίπεδο, να επηρεάσουν την τιμή προϊόντος και γενικότερα κάθε συντελεστή παραγωγής. Με τη χρήση κώδικα της

γλώσσας προγραμματισμού Wolfram Language, παριστάνονται γραφικά οι ισορροπίες που επιτυγχάνονται στο μονοπώλιο και στον τέλει ανταγωνισμό αντίστοιχα, καθώς και η καμπύλη των κερδών της επιχείρησης.

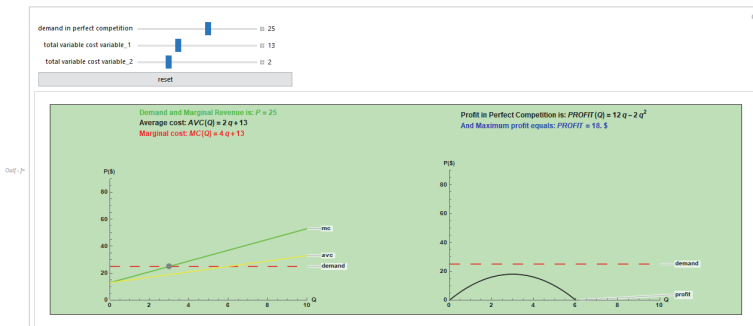
Στη μελέτη περίπτωσης μιας μονοπωλιακής επιχείρησης, θεωρούμε γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης του μονοπωλητή και τετραγωνική συνάρτηση κόστους, όπου είναι οι εξής (Τσουλιφίδης, 2005):

$$P=a-b\cdot Q, TC=c\cdot Q+d\cdot Q^2 \quad (2)$$

Με βάση τους παραπάνω τύπους, υπολογίζονται οι συναρτήσεις μέσου κόστους, οριακών εσόδων και οριακού κόστους και εντοπίζεται το σημείο στο οποίο επιτυγχάνεται μεγιστοποίηση των εσόδων του μονοπωλίου με μεταβολή των παραμέτρων a, b, c, d (εικόνα 3). Όπως και στο μονοπώλιο και στην περίπτωση του τέλει ανταγωνισμού, στόχος είναι η εποπτική παρουσίαση του σημείου στο οποίο επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση των κερδών με μεταβολή των παραμέτρων p, c, d (εικόνα 4). Στην περίπτωση του τέλει ανταγωνισμού, στο υπόδειγμα (2) θεωρούμε ότι η ζήτηση είναι σταθερή, δηλ. $P=MR=MC$.

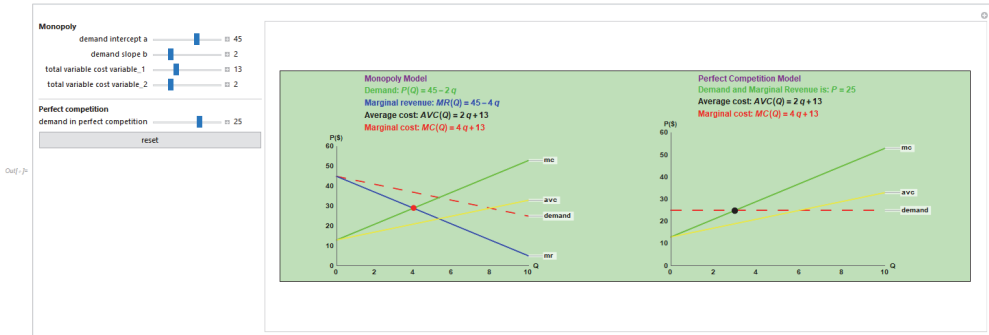


Εικόνα 3. Μεταβολή της ισορροπίας στο μονοπώλιο. Στο computable document οι συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας εμφανίζονται με mouse over.



Εικόνα 4. Μεταβολή της ισορροπίας στον τέλει ανταγωνισμό. Στο *computable document* οι συντεταγμένες του σημείου ισορροπίας εμφανίζονται με *mouse over*.

Σε αυτό το σημείο της μελέτης, θα οδηγηθούμε να συγκρίνουμε γραφικά τις δύο αυτές μορφές αγοράς (εικόνα 5).



Εικόνα 5. Ποσότητα και τιμή στο μονοπώλιο και στον τέλει ανταγωνισμό

3.3 Το μακροοικονομικό υπόδειγμα IS-LM: ισορροπία εισοδήματος και επιτοκίου

Ένα από τα σημαντικότερα υποδείγματα της μακροοικονομικής θεωρίας είναι το υπόδειγμα IS-LM. Η καμπύλη IS σημαίνει επένδυση και αποταμίευση και δείχνει τις μεταβολές στην αγορά αγαθών και υπηρεσιών. Ο προσδιορισμός αυτής της σχέσης γίνεται μέσω του βασικού υποδείματος που ονομάζεται κεϋνσιανός σταυρός. Η καμπύλη LM σημαίνει ρευστότητα και χρήμα και δείχνει τις μεταβολές στην αγορά χρήματος. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο αγορών προσδιορίζουν το επίπεδο εισοδήματος βραχυχρονίως. Οι πολιτικές που χρησιμοποιούνται για τις μεταβολές του υποδείματος είναι η δημοσιονομική, η οποία επηρεάζει την αγορά αγαθών και υπηρεσιών και η νομισματική, η οποία επιδρά στην αγορά χρήματος. Με την χρήση αυτών των πολιτικών θα μελετήσουμε την καμπύλη της συναθροιστικής ζήτησης που παρουσιάζει συνοπτικά την σχέση στο επίπεδο των τιμών και το εισόδημα (εικόνα 6).

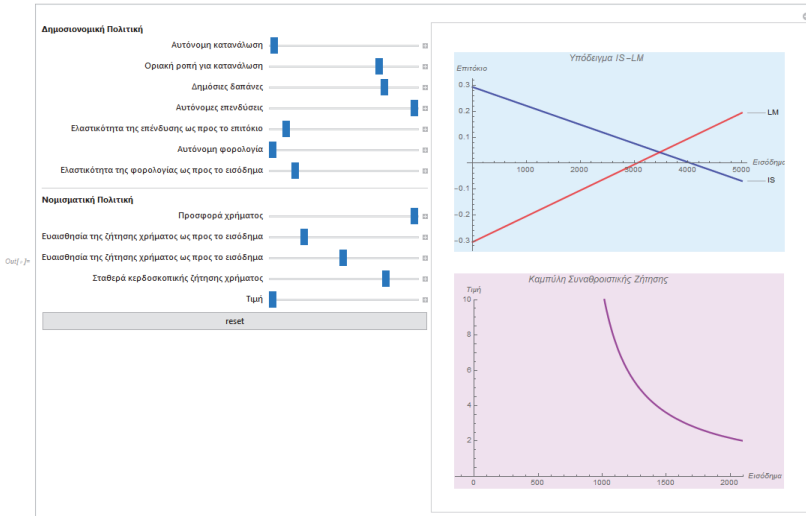
Στη μελέτη περίπτωσης μελετάται μία κλειστή οικονομία η οποία περιγράφεται από τις ακόλουθες συναρτήσεις (Σιδηρόπουλος, 2016 σελ. 293-359):

$$Y=C+I+G, C=C_0+ C_Y(Y-T), I=I_0+ I_r r, T=T_0+T_Y Y, G=G_0 \tag{3}$$

$$M_s=M_l+ M_2, M_s=M_0, M_l= p(l_Y Y), M_2=p(l_0+ l_r r) \tag{4}$$

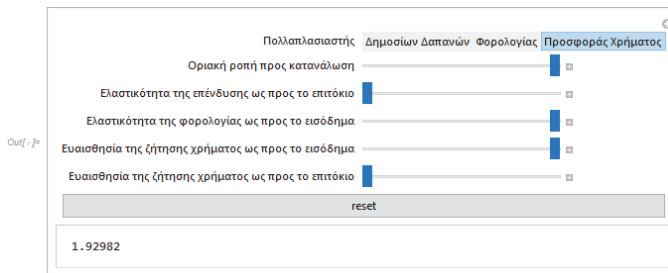
όπου C κατανάλωση, I επενδύσεις, G δημόσιες δαπάνες, C_0 αυτόνομη κατανάλωση, C_Y οριακή ροπή για κατανάλωση, I_0 αυτόνομες επενδύσεις, I_r ελαστικότητα της επένδυσης ως προς το επιτόκιο, T_0 αυτόνομη φορολογία, T_Y ελαστικότητα της φορολογίας ως προς το εισόδημα, M_0 προσφορά χρήματος, M_l συναλλακτική ζήτηση χρήματος, M_2 κερδοσκοπική ζήτηση χρήματος, L_Y ευαισθησία της ζήτησης χρήματος

ως προς το εισόδημα, L_r ευαισθησία της ζήτησης χρήματος ως προς το επιτόκιο, L_0 σταθερά κερδοσκοπικής ζήτησης χρήματος.



Εικόνα 6. Ταυτόχρονη μεταβολή καμπύλων IS-LM και καμπύλης συναθροιστικής ζήτησης.

Στη συνέχεια αναλύονται οι πολλαπλασιαστές του υποδείγματος που προσδιορίζουν τις επιπτώσεις των μακροοικονομικών πολιτικών στο εθνικό προϊόν και το επιτόκιο ισορροπίας. Στην εικόνα 7 παρουσιάζεται το πολλαπλασιαστικό αποτέλεσμα που έχει η μεταβολή μίας εξωγενούς μεταβολής (δημόσιες δαπάνες, πάγιοι φόροι, προσφορά χρήματος κτλ.) στο εισόδημα ισορροπίας.



Εικόνα 7. Αυτόματος υπολογισμός πολλαπλασιαστών (με πλήκτρα) κατόπιν ορισμού των παραμέτρων (σύρτες)

4. Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία διενεργείται διαδραστικά παραμετρική ανάλυση και συγκριτική στατική ανάλυση οικονομικών υποδειγμάτων από τη μικροοικονομική

και τη μακροοικονομική, στο σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας Wolfram Mathematica. Με χρήση πρωτότυπου κώδικα, αντιμετωπίζονται υπολογιστικά προβλήματα βελτιστοποίησης και δεσμευμένης βελτιστοποίησης σε επιχειρησιακά προβλήματα. Εξετάζεται εμπειρικά η μετατόπιση των σημείων ισορροπίας που επιτυγχάνονται σε διαφορετικές αγορές (τέλειος ανταγωνισμός και μονοπώλιο) μετά από αλλαγή στις παραμέτρους της συνάρτησης ζήτησης και της συνάρτησης κόστους. Επιτυγχάνεται συγκριτική απεικόνιση οικονομικών καμπύλων σε διαφορετικές αγορές. Παρουσιάζεται εποπτικά η σχέση εισοδήματος και επιτοκίου στις αγορές χρήματος και αγαθών και υπηρεσιών. Αναλύεται γραφικά ο τρόπος με τον οποίο η νομισματική και η δημοσιονομική πολιτική μετατοπίζουν την καμπύλη συναθροιστικής ζήτησης.

Σε όλες αυτές τις θεματικές, επιτυγχάνεται αυτόματη δημιουργία μεγάλου αριθμού αριθμητικών παραδειγμάτων σε αρχεία Mathematica (notebooks) με τον κώδικα σε κοινή θέα και, σε εφαρμογές της Mathematica (Wolfram demonstrations) με την επιλογή εμφάνισης του κώδικα. Τα αρχεία τύπου demonstration τρέχουν σε υπολογιστές με Windows, Mac ή Linux χωρίς να απαιτείται εγκατάσταση της Mathematica. Η παρούσα υπολογιστική προσέγγιση απευθύνεται σε εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές οικονομικής κατεύθυνσης. Η ανάλυση μπορεί να γίνει σε έγγραφα της Mathematica (notebooks) για χρήστες του προγράμματος, σε υπολογιστικά έγγραφα (computable document format) για μη χρήστες του προγράμματος ή σε Wolfram demonstrations για on-line πρόσβαση και χρήση.

Αναφορές

Huang, C. & Crooke, P. (1997). *Mathematics and Mathematica for Economists*, Massachusetts: Oxford Blackwell Publishers.

Wolfram Demonstrations Project (2019). Ανάκτηση από το <https://demonstrations.wolfram.com/>.

Δρανδάκης, Ε., Μπήτρος, Γ. & Μπαλτάς, Ν. (2003). *Μικροοικονομική θεωρία*, Τόμος Β', Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλης.

Σιδηρόπουλος, Μ. Γ. (2016). *Μακροοικονομική θεωρία και πολιτική: Μία αναλυτική παρουσίαση των παραδοσιακών και σύγχρονων προσεγγίσεων*. Εκδόσεις Ζυγός.

Τσουλφίδης, Λ. (2005). *Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης. Μέθοδοι και Υποδείγματα*, Β' Έκδοση, Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Παράρτημα

Παρατίθεται ενδεικτικά μέρος του κώδικα για τα παραδείγματα των ενοτήτων 3.1-3.3. Ακολούθως, ο κώδικας για το αποτέλεσμα της εικόνας 2.

```

In[ ]:= Clear[pk, pl]
[αναγραφή ορισμών και πηλών συμβόλων]
In[ ]:= Cost[a_, l_, pk_, pl_] := pk * k + pl * l
In[ ]:= q[a_, l_] := 15 * k^a * l^b;
In[ ]:= V[k, l, λ] := pk * k + pl * l + λ (q1 - 15 * k^a * l^b)
In[ ]:= Solve[{D[V[k, l, λ], k] == 0, D[V[k, l, λ], l] == 0, D[V[k, l, λ], λ] == 0}, {k, l, λ}]
[λύση ε-: μερικά παράγοντες μερικά παράγοντες μερικά παράγοντες]
In[ ]:= H = 
$$\begin{pmatrix} 0 & D[q1 - q[k, l], k] & D[q1 - q[k, l], l] \\ D[q1 - q[k, l], k] & D[V[k, l, λ], {k, 2}] & D[V[k, l, λ], k, l] \\ D[q1 - q[k, l], l] & D[V[k, l, λ], k, l] & D[V[k, l, λ], {l, 2}] \end{pmatrix}$$

In[ ]:= FullSimplify[Det[H]]
[πλήρης απλοστ- ορίζουσα]
In[ ]:=
Costab[a_, b_, q1_, pk_, pl_] := Cost  $\left[ e^{\frac{-\log(15) + b \log(a) - b \log(b) - b \log(pk) + b \log(pl) + \log(a)}{a+b}}, e^{\frac{-\log(15) - \log(a) + \log(b) + \log(pk) - \log(pl) + \log(a)}{a+b}}, pk, pl \right]$ 
Manipulate[Column[[στήλη] {
  Labeled[Costab[a, b, q1, pk, pl], "The minimum cost is", Left],
[ετικέτα οριζική θέση]
  Labeled  $e^{\frac{-\log(15) + b \log(a) - b \log(b) - b \log(pk) + b \log(pl) + \log(a)}{a+b}}$ , "The optimal k is", Left],
[ετικέτα οριζική θέση]
  Labeled  $e^{\frac{-\log(15) - \log(a) + \log(b) + \log(pk) - \log(pl) + \log(a)}{a+b}}$ , "The optimal l is", Left]
}],
{a, 0.0001, 4, 0.1}, {b, 0.0001, 2, 0.1}, {q1, 100, 500, 10}, {pk, 1, 50, 1}, {pl, 1, 40, 1},
Button["reset", {a = 0.8, b = 0.2, q1 = 500, pk = 30, pl = 10}]
[κουμπι]

```

Ο κώδικας για το αποτέλεσμα της εικόνας 6.

```

M/J- c := cy * (y - t) + co
M/J- i := ir * r + io
M/J- t := ty * y + to
M/J- g := go
M/J- m1 := p * (ly * y)
M/J- m2 := p * (lr * r + lo)
M/J- ms := mo
M/J-
M/J- Solve[y = c + i + g, {r}]
M/J- Solve[ms = m1 + m2, {r}]
M/J- Solve[
$$\frac{-co - go - io + cy to + y - cy y + cy ty}{ir} = \frac{mo - lo p - lyp}{lr p}, \{p\}]$$
]
M/J- Manipulate[
GraphicsColumn[
Plot[Tooltip[
$$\frac{-co - go - io + cy to + y - cy y + cy ty}{ir}$$
, "IS"], Tooltip[
$$\frac{mo - lo p - lyp}{lr p}$$
, "LM"]], {y, 0, 5000}, PlotLabels -> {"IS", "LM"},
PlotStyle -> {{Thickness[.006], Opacity[.7], Blue}, {Thickness[.006], Opacity[.7], Red}}, AxesOrigin -> {0, 0},
AxesLabel -> {Style["Εισόδημα", Italic], Style["Επιτόκιο", Italic]}, PlotLabel -> Style["Υπόδειγμα IS-LM", Italic], Background -> LightBlue},
Plot[Tooltip[
$$\frac{ir mo}{-mo - co lr - go lr - io lr + cy lr to + lry - cy lry + ir ly y + cy lr ty}$$
, "AD"], {y, 0, 5000}, Frame -> None, PlotRange -> {{-150, 2100}, {0, 10}},
AxesLabel -> {Style["Εισόδημα", Italic], Style["Τιμή", Italic]}, PlotStyle -> {{Thickness[.006], Opacity[.7], Purple}}, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotLabel -> Style["Καμπύλη Συναθροιστικής Ζήτησης", Italic], Background -> LightPurple,
Frame -> True, ImageSize -> Full]], Style["Δημοσιονομική Πολιτική", Bold], {{co, 45, "Αυτόνομη κατανάλωση"}, 45, 500, 5},
{{cy, 0.01, "Οριζική ροπή για κατανάλωση"}, 0.01, 0.99, 0.01}, {{go, 100, "Δαπάνες δαπάνες"}, 100, 1000, 5},
{{io, 100, "Αυτονομη επένδυση"}, 100, 800, 10}, {{ir, -6000, "Ελαστικότητα της επένδυσης ως προς το επιτόκιο"}, -6000, -1000, 100},
{{to, 50, "Αυτόνομη φορολογία"}, 50, 500, 10}, {{ty, 0.05, "Ελαστικότητα της φορολογίας ως προς το εισόδημα"}, 0.05, 0.95, 0.01}, Delimiter, Style["Νομισματική Πολιτική", Bold],
{{mo, 200, "Προσφορά χρήματος"}, 200, 1415, 10}, {{ly, 0.1, "Ευαισθησία της ζήτησης χρήματος ως προς το εισόδημα"}, 0.1, 1, 0.01},
{{lr, -5000, "Ευαισθησία της ζήτησης χρήματος ως προς το εισόδημα"}, -5000, -1000, 100}, {{lo, 100, "Εσταθερά κερδοσκοπικής ζήτησης χρήματος"}, 100, 600, 5},
{{p, 1, "Τιμή"}, 1, 10, 1}, Button["reset", {co = 50, cy = 0.75, ir = -5500, io = 800, go = 810, to = 80, ty = 0.2, ly = 0.3, lr = -3000, lo = 500, mo = 1415, p = 1}],
ControlPlacement -> Left]

```

Ο κώδικας για το αποτέλεσμα της εικόνας 5.

```

Manipulate[
GraphicsRow[
Plot[Tooltip[a - b + q, "Demand"], Tooltip[a - 2 + b + q, "Marginal Revenue"], Tooltip[c + 2 + d + q, "Marginal cost"], Tooltip[c + d + q, "Average variable cost"],
{q, 0, 10}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 60}},
PlottLabel -> Column[
Style[Row["Monopoly Model "], RGBColor[0.5, 0.08, 0.56]],
Style[Row[{"Demand: ", Style["P", Italic], "("}, Style["Q", Italic], ") = ", a - b + q}], RGBColor[0.23, 0.77, 0.22]],
Style[Row[{"Marginal revenue: ", Style["MR", Italic], "("}, Style["Q", Italic], ") = ", a - 2 + b + q}], Blue],
Style[Row[{"Average cost: ", Style["AVC", Italic], "("}, Style["Q", Italic], ") = ", c + d + q}],
Style[Row[{"Marginal cost: ", Style["MC", Italic], "("}, Style["Q", Italic], ") = ", c + 2 + d + q}], Red]],
LabelStyle -> {Bold, Black}, PlottLabels -> {"demand", "mr", "mc", "avc"}, PlotStyle -> {{Dashing[0.05], Red}, {Blue}, {Green}, {Yellow}},
AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {Style["Q", Bold], Style["P($)", Bold]},
Eplig -> {PointSize[0.03], Red, Tooltip[Point[ $\left[ \frac{a-c}{2}, \frac{b(a-c)}{2} \right]$ ],  $\left[ \frac{a-c}{2}, \frac{b(a-c)}{2} \right]$ ]}],
Plot[Tooltip[e, "Demand-Price"], Tooltip[c + 2 + d + q, "Marginal cost"], Tooltip[c + d + q, "Average variable cost"], {q, 0, 10},
PlotRange -> {{0, 10}, {0, 60}},
PlottLabel -> Column[
Style[Row["Perfect Competition Model "], RGBColor[0.5, 0.08, 0.56]],
Style[Row[{"Demand and Marginal Revenue is: ", Style["P", Italic], ") = ", e}], RGBColor[0.23, 0.77, 0.22]],
Style[Row[{"Average cost: ", Style["AVC", Italic], "("}, Style["Q", Italic], ") = ", c + d + q}],
Style[Row[{"Marginal cost: ", Style["MC", Italic], "("}, Style["Q", Italic], ") = ", c + 2 + d + q}], Red]],
LabelStyle -> {Bold, Black}, PlottLabels -> {"demand", "mc", "avc"}, PlotStyle -> {{Dashing[0.05], Red}, {Green}, {Yellow}},
Eplig -> {PointSize[0.03], Black, Tooltip[Point[ $\left[ \frac{a-c}{2}, e \right]$ ],  $\left[ \frac{a-c}{2}, e \right]$ ]}], AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {Style["Q", Bold], Style["P($)", Bold]},
Button["reset", {a = 45, b = 2, c = 13, d = 2, e = 25}]
Background -> RGBColor[0.52, 0.88, 0.5, 0.52], ImageSize -> Full, Frame -> True],
Style["Monopoly", Bold],
{{a, 45, "demand intercept a"}, 35, 50, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
{{b, 2, "demand slope b"}, 1, 5, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
{{c, 13, "total variable cost variable_1"}, 12, 15, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
{{d, 2, "total variable cost variable_2"}, 1, 5, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
Delimiter,
Style["Perfect competition", Bold],
{{e, 25, "demand in perfect competition"}, 13, 30, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
Button["reset", {a = 45, b = 2, c = 13, d = 2, e = 25}]
]

```

Abstract

Developing Interactive Computable Documents for Economic Analysis

In this study we propose how Mathematica resources can display analysis and evaluation of three well known economic models. We develop interactive computable documents and Wolfram Demonstrations Projects by writing code that serve comparative-static aspects of optimization in microeconomics and comparative static analysis for IS-LM macroeconomic model. The code is written in Wolfram Language. We present a computerized approach of three economic case-studies that serve two scopes: (1) as a didactic tool and (2) as a research tool, as the code allows ample space for improvements and customization. Each case study presented is an open source resource, licensed under CC BY-NC-SA, available upon request by the corresponding author.

Keywords: Interactive visualizations, comparative statics, parametric analysis